Investigação Operacional

Regente: Prof. Dr. Cachimo Assane

Licenciatura em Contabilidade e Auditoria

Capítulo 3: Dualidade e análise de sensibilidade

Tema 1: A Teoria da Dualidade

Licenciatura Contabilidade e Auditoria-2018/Sem II

Dualidade

- O problema dual é um PPL definido directa e sistematicamente de acordo com o PPL Primal (ou original);
- Uma vez obtida a solução óptima de um deles, a solução óptima do outro é imediata (automática);
- Os estudos de dualidade possibilitam:
  - A melhor compreensão estrutural dos PPL's;
  - A interpretação económica de alguns parâmetros, como o preço-sombra e o valor implícito (custo de oportunidade);
  - Interpretação e implementação da análise de sensibilidade;
  - O desenvolvimento do algoritmo dual-simplex para a análise pós-optimização, cujo objectivo é determinar a nova solução óptima que resulta de alterações nos parâmetros do modelo.

Obtenção do Dual a partir do PPL Primal

- consideraremos, por conveniência, o PPL primal como um problema de minimização;
- todas as restrições do PPL primal são do tipo ($\geq$) cujo lado direito é não negativo e todas as variáveis são não negativas. Ou seja

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{Sujeito a :} & \\
& \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0.
\end{cases}
\end{array}
$$

Obtenção do Dual a partir do PPL Primal

- Então, o problema dual é dado pelo seguinte PPL:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\ &\text{Sujeito a :} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n \\ y_i \geq 0 \;\; i = 1, 2, ..., m. \end{cases}$$

- Matricialmente, tem-se que:

Problema Primal		Problema Dual			
Minimizar	$c^T.x$	Maximizar	$b^T.y$	ou	$y^T.b$
sujeito à:	$A.x = b$	sujeito à:	$A^T.y \leq c$	ou	$y^T.A \leq c^T$
	$x_j \geq 0$			$y \geq 0$	

Obtenção do Dual a partir do PPL Primal

- Observações importantes
  - O problema primal é de minimização e o dual de maximização;
  - Uma variável do PPL dual é definida para cada restrição do PPL primal;
  - Uma restrição do PPL dual é definida para cada variável do PPL primal;
  - Os coeficientes da restrição (coluna) de uma variável do PPL primal definem os coeficientes da lado esquerdo da restrição dual, e seus coeficientes na função objectivo (primal) definem os coeficientes do lado direito (dual).
  - Os coeficientes da função objectivo do PPL dual são iguais aos coeficientes do lado direito das equações de restrição do PPL primal.
  - Também existem relações entre os sinais das restrições e das variáveis duais.

Obtenção do Dual a partir do PPL Primal

			Problema Primal					
			Coeficiente de:				Lado Direito	
			x_1	x_2	$\cdots$	x_n		
Problema Dual	Coeficientes de:	y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	Coeficientes para a F.O. (Maximizar)
		y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	
		$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_2	
		Lado Direito	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		
			Coeficiente para a F.O (Minimizar)					

- A tabela a seguir fornece as regras de como construir o dual de um PPL primal em qualquer forma:

Obtenção do Dual a partir do PPL Primal

Regras para construção do PPL Dual

Primal (Dual)		Dual (Primal)
Minimização	$\Leftrightarrow$	Maximização
Vector de recursos	$\Leftrightarrow$	Coeficientes da F.O.
Coeficientes da F.O.	$\Leftrightarrow$	Vector de recursos
Restrição	$\Leftrightarrow$	Variável
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrita
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
Variável	$\Leftrightarrow$	Restrição
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
Irrestrita	$\Leftrightarrow$	$=$

- O mais importante nessa tabela é o sentido (objectivo) de optimização. Se o Primal é de maximização, então o dual é de minimização, e vice-versa.

Obtenção do Dual a partir do PPL Primal

Exemplo 1: Obtenha o dual do seguinte PPL primal:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito à:} & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & -x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ & 4x_1 + 7x_2 \leq 8 \\ & x_1 \ \text{ livre},\ x_2 \geq 0, \end{array}$$

- Como o PPL Primal é de maximização, o dual será de minimização;
- Analisando as restrições do Primal com base no resumo da tabela acima:
  - ➜ A primeira restrição com sinal "$=$" vai resultar na variável dual y_1 irrestrita;
  - ➜ A segunda restrição com sinal "$\geq$" resultará na variável dual y_2 com sinal "≤ 0";
  - ➜ A segunda restrição com sinal "$\leq$" resultará na variável dual y_2 com sinal "≥ 0";

Obtenção do Dual a partir de seu PPL Primal

- Analisando as variáveis do Primal
  - Como x_1 é livre, então a primeira restrição do PPL dual terá sinal " $=$";
  - A variável $x_2 \geq 0$ fará com que a 2ª restrição do dual seja "$\geq$"
- O PPL dual é, então, escrito como:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & W = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3 \\ \text{sujeito à:} & y_1 - y_2 + 4y_3 = 5 \\ & 2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6 \\ & y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

Obtenção do Dual a partir do PPL Primal

Exemplo 2: Obtenha o dual do PPL a seguir:

$$\text{Minimizar } W = x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ & 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 8x_4 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3, x_4 \text{ irrestritos} \end{aligned}$$

- Como o PPL Primal é de minimização, o dual será de maximização;
- Analisando as restrições do Primal:
  - ➜ A primeira e a terceira restrições com sinal "$\geq$" vão resultar nas variáveis duais y_1 e y_3 com sinal "≥ 0";
  - ➜ A segunda restrição com sinal "$\leq$" resultará numa variável dual y_2 com sinal "≤ 0";

Obtenção do Dual a partir de seu PPL Primal

- Analisando as variáveis do Primal:
  - Como $x_1 \geq 0$, então, a primeira restrição do PPL dual terá sinal "$\leq$";
  - A variável $x_2 \leq 0$ faz como que o sinal da 2ª restrição do PPL dual seja do tipo "$\geq$"
  - Finalmente, as variáveis irrestritas x_3 e x_4 resultam nas restrições do PPL dual com sinal "$=$".
- Logo, o PPL dual para esse problema fica:

$$\text{Maximizar } Z = 6y_1 + y_2 + 2y_3$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{aligned}
&y_1 + 5y_3 \leq 0 \\
&y_1 + y_2 - 6y_3 \geq 1 \\
&y_2 + 7y_3 = 1 \\
&-y_2 - 8y_3 = 1 \\
&y_1, y_3 \geq 0, y_2 \leq 0
\end{aligned}$$

A Teoria da Dualidade

- Uma aplicação importante da teoria da dualidade é que o PPL dual pode ser resolvido directamente pelo método simplex de modo a identificar uma solução óptima para o PPL primal (geralmente quando m é consideravelmente maior do que n).
- Os teoremas a seguir são usados para descrever as correspondências entre os dois modelos (Primal-Dual).

A Teoria da Dualidade

- Uma aplicação importante da teoria da dualidade é que o PPL dual pode ser resolvido directamente pelo método simplex de modo a identificar uma solução óptima para o PPL primal (geralmente quando m é consideravelmente maior do que n).

- Os teoremas a seguir são usados para descrever as correspondências entre os dois modelos (Primal-Dual).

  1) Teorema da Dualidade Fraca: Se x_0 for uma solução viável do PPL Primal que satisfaz a $Ax \geq b, x \geq 0$, e y_0 uma solução viável do PPL Dual, então $c^T x_0 \geq b^T y_0$.

A Teoria da Dualidade

- Uma aplicação importante da teoria da dualidade é que o PPL dual pode ser resolvido directamente pelo método simplex de modo a identificar uma solução óptima para o PPL primal (geralmente quando m é consideravelmente maior do que n).

- Os teoremas a seguir são usados para descrever as correspondências entre os dois modelos (Primal-Dual).

  1) Teorema da Dualidade Fraca: Se x_0 for uma solução viável do PPL Primal que satisfaz a $Ax \geq b, x \geq 0$, e y_0 uma solução viável do PPL Dual, então $c^T x_0 \geq b^T y_0$.
  2) Teorema da Dualidade Forte: Se um PPL Primal tem uma solução óptima e finita x^*, então:
     a) O Dual correspondente tem solução óptima e finita y^*;
     b) $c^T x^* = b^T y^*$

A Teoria da Dualidade

- Uma aplicação importante da teoria da dualidade é que o PPL dual pode ser resolvido directamente pelo método simplex de modo a identificar uma solução óptima para o PPL primal (geralmente quando m é consideravelmente maior do que n).

- Os teoremas a seguir são usados para descrever as correspondências entre os dois modelos (Primal-Dual).

  1) Teorema da Dualidade Fraca: Se x_0 for uma solução viável do PPL Primal que satisfaz a $Ax \geq b, x \geq 0$, e y_0 uma solução viável do PPL Dual, então $c^T x_0 \geq b^T y_0$.
  2) Teorema da Dualidade Forte: Se um PPL Primal tem uma solução óptima e finita x^*, então:
     a) O Dual correspondente tem solução óptima e finita y^*;
     b) $c^T x^* = b^T y^*$

- O Teorema da dualidade forte é satisfeita quando ambas as soluções forem ótimas.

- Para ilustrar o Teorema da Dualidade Forte, considere, primeiro, a representação matricial para a tabela simplex. Seja o PPL na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar } Z = \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} \\
&\qquad \text{s.a}: \\
&\qquad\qquad \begin{cases} \mathrm{Ax} = \mathrm{b} \\ x \geq 0, \ \text{onde} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- ➜ x é o vector coluna composto das variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$
- ➜ A é uma matriz $m \times n$, composta pelos elementos $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$
- ➜ b é um vector coluna $\times m$ composto por $b_1, b_2, \cdots, b_m$
- ➜ c é um vector coluna $n \times 1$ composto por $c_1, c_2, \cdots, c_n$, c^T o vector linha.

- Considere a Partição segundo as variáveis Naturais e de Folga

Variáveis Naturais (VN)	Variáveis de Folga (VF)
$x_1 \cdots x_t$	$x_{t+1} \cdots x_n$
A_{Orig}	$\mathbb{I}$
c^T	0

- Então, a representação matricial para a solução óptima é:

Linhas	V.Naturais	V.Folga	RHS
	$x_1 \cdots x_t$	$x_{t+1} \cdots x_n$	
Restrições	$B^{-1}.A_{Orig}$	B^{-1}	$B^{-1}.b$
FO	$c^T - c_B^T.B^{-1}.A_{orig}$	$-c_B^T.B^{-1}$	$Z - c_B^T.B^{-1}.b$

- A_{orig} é matriz $(m \times t)$ composta por colunas das VNs; B é matriz $(m \times m)$ das colunas relativas a Variáveis Básicas (VBs). B^{-1} é a matriz inversa de B;
- Observe que $c_B^T.B^{-1}.b$ é o valor óptimo da FO primal e que o vector óptimo das VB é $x_B^* = B^{-1}.b$. Portanto, $c_B^T.x_B^* = c_B^T.B^{-1}.b = y^{*T}.b$.

A Teoria da Dualidade

- Teorema Fundamental da Dualidade: Condições que podem ser encontradas em um dual, dada a situação do PPL primal:

	Primal		
Dual	Óptimo	Ilimitado	Inviável
Óptimo	Sim	Não	Não
Ilimitado	Não	Não	Sim
Inviável	Não	Sim	Sim

Exemplo: Considere o par dos modelos Primal $\times$ Dual:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{Maximizar} & Z = -3x_1 + 2x_2 & \\
 & \text{sujeito à:} & x_1 \leq 3 & \\
 & & x_1 - x_2 \leq 0 & \Leftrightarrow \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{Minimizar} & W = 3y_1 \\
 & \text{sujeito à:} & y_1 + y_2 \geq -3 \\
 & & y_2 \leq -2 \\
 & & y_1, y_2 \geq 0.
\end{array}
$$

- Representando ambos os problemas graficamente, é fácil observar que o PPL primal é ilimitado e o PPL dual inviável.

Teorema de Complementaridade de Folga

- Diz respeito à relação entre as variáveis dos problemas primal e dual.
- Dado o par de problemas primal/dual

$$(P)\quad \text{Min} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad (D)\quad \text{Max} \quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ \ i = 1, ..., m \qquad\qquad \text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1...n$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, ..., n \qquad\qquad y_i \geq 0,\ \ i = 1, ..., m$$

- Introduzindo a variável de folga nos PPL's primal e dual:

$$(P)\quad \text{Min} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad (D)\quad \text{Max} \quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \qquad\qquad \text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + y_{m+j} = c_j$$

$$x_j \geq 0, x_{n+i} \geq 0,\ \ \forall j, i \qquad\qquad y_i \geq 0, y_{m+j} \geq 0\ \forall i, j$$

Teorema de Complementaridade de Folga

- Teorema: x^* e y^* são soluções óptimas de P. e D. se e somente se forem viáveis e satisfizerem as condições complementares de folga (CCF):
  - Para cada restrição i do P.: $\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right] y_i^* = 0,$
    $i = 1, ..., m$; ou seja, $y_i^* \cdot x_{n+i}^* = 0,\ i = 1, ..., m;$
  - Para cada restrição j do D.: $\left[c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^*\right] x_j^* = 0,$
    $j = 1, ..., n$; ou seja, $x_j^* \cdot y_{m+j}^* = 0,\ j = 1, ..., n;$

  onde:
  - y_i^* = variáveis naturais do Dual
  - y_{m+j}^* = variáveis de folga do Dual
  - x_j^* = variáveis naturais do Primal
  - x_{n+i}^* = variáveis de folga do Primal
- Este teorema relaciona as VBs em um PPL às VNBs do outro.

Exemplo de aplicação do Teorema de C.F.

- Desejando-se encontrar a solução do dual (primal) sabendo a do primal (dual), basta utilizar-se das CCF.
- Exemplo 1: Considere o primal e o dual (na forma padrão) do problema da manufactura:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Min} & Z = -20x_1 - 24x_2 \\ & \text{s.a:} & 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 60 \\ & & 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 32 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (D) & \text{Min} & W = 60y_1 + 32y_2 \\ & \text{s.a:} & 3y_1 + 4y_2 - y_3 = 20 \\ & & 6y_1 + 2y_2 - y_4 = 24 \\ & & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

- Para este par de problemas, as CCF ficarão:

$$\begin{array}{ll} x_1.y_3 = 0 & x_3.y_1 = 0 \\ x_2.y_4 = 0 & x_4.y_2 = 0 \end{array}$$

Exemplo de aplicação do Teorema de C.F.

- Desejando-se encontrar a solução do dual (primal) sabendo a do primal (dual), basta utilizar-se das CCF.
- Exemplo 1: Considere o primal e o dual (na forma padrão) do problema da manufactura:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Min} & Z = -20x_1 - 24x_2 \\
 & \text{s.a:} & 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 60 \\
 & & 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 32 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
(D) & \text{Min} & W = 60y_1 + 32y_2 \\
 & \text{s.a:} & 3y_1 + 4y_2 - y_3 = 20 \\
 & & 6y_1 + 2y_2 - y_4 = 24 \\
 & & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{array}
$$

- Para este par de problemas, as CCF ficarão:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 . y_3 = 0 & x_3 . y_1 = 0 \\
x_2 . y_4 = 0 & x_4 . y_2 = 0
\end{array}
$$

- Sabe-se que a solução óptima do primal é $x^* = [4; 8; 0; 0]$;

Exemplo de aplicação do Teorema de C.F.

- Desejando-se encontrar a solução do dual (primal) sabendo a do primal (dual), basta utilizar-se das CCF.
- Exemplo 1: Considere o primal e o dual (na forma padrão) do problema da manufactura:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Min} & Z = -20x_1 - 24x_2 \\ & \text{s.a:} & 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 60 \\ & & 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 32 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (D) & \text{Min} & W = 60y_1 + 32y_2 \\ & \text{s.a:} & 3y_1 + 4y_2 - y_3 = 20 \\ & & 6y_1 + 2y_2 - y_4 = 24 \\ & & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

- Para este par de problemas, as CCF ficarão:

$$\begin{array}{ll} x_1.y_3 = 0 & x_3.y_1 = 0 \\ x_2.y_4 = 0 & x_4.y_2 = 0 \end{array}$$

- Sabe-se que a solução óptima do primal é $x^* = [4; 8; 0; 0]$;
- Pelas CCF, para o dual, sabe-se que a base é composta por y_1 e y_2, uma vez que y_3 e y_4 são iguais a zero. Então, tem-se

$$\begin{array}{l} 3y_1 + 4y_2 = 20 \\ 6y_1 + 2y_2 = 24 \end{array}$$

- E a solução do dual é $y^* = [28/9; 8/3; 0; 0]$

Exemplo de aplicação do Teorema de C.F.

- Exemplo 2: Considere o seguinte par primal/Dual

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Min} & Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\
 & \text{s.a:} & x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 1 \\
 & & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\
 & & x_j \geq 0 \ \forall j
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
(D) & \text{Max} & W = y_1 + y_2 \\
 & \text{s.a:} & y_1 + 2y_2 \leq 2 \\
 & & y_1 - 2y_2 \leq 3 \\
 & & -2y_1 + y_2 \leq 4 \\
 & & 2y_1 + y_2 \leq 2 \\
 & & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

- Adicionando as variáveis de folga ou de excesso, temos:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{Min} & Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\
 & \text{s.a:} & x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\
 & & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 1 \\
 & & x_j \geq 0 \ \forall j
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
(D) & \text{Max} & W = y_1 + y_2 \\
 & \text{s.a:} & y_1 + 2y_2 + y_3 = 2 \\
 & & y_1 - 2y_2 + y_4 = 3 \\
 & & -2y_1 + y_2 + y_5 = 4 \\
 & & 2y_1 + y_2 + y_6 = 2 \\
 & & y_i \geq 0 \ \forall j
\end{array}
$$

- A relação entre as variáveis primais e duais é:

Exemplo de aplicação do Teorema de C.F.

$$VN \left\{ \begin{array}{cc} x_1 & y_3 \\ x_2 & y_4 \\ x_3 & y_5 \\ x_4 & y_6 \end{array} \right\} VF$$

$$VF \left\{ \begin{array}{cc} x_5 & y_1 \\ x_6 & y_2 \end{array} \right\} VN$$

- Sabe-se que solução óptima do dual é:

$$y^* = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 11/3 \\ 14/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Exemplo de aplicação do Teorema de C.F.

$$VN \left\{ \begin{array}{cc} x_1 & y_3 \\ x_2 & y_4 \\ x_3 & y_5 \\ x_4 & y_6 \end{array} \right\} VF$$

$$VF \left\{ \begin{array}{cc} x_5 & y_1 \\ x_6 & y_2 \end{array} \right\} VN$$

- Sabe-se que solução óptima do dual é:

$$y^* = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 11/3 \\ 14/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

- Sabe-se ainda que, no problema dual:
  - ➜ Variáveis básicas e de folga: y_4 e y_5
  - ➜ Variáveis não básicas de folga: y_3 e y_6
  - ➜ Variáveis básicas e naturais: y_1 e y_2

Exemplo de aplicação do Teorema de C.F.

- Aplicando as CCF, obtém-se, para o primal:
  - ➜ VNB naturais: x_2 e x_3 (Correspondentes a y_4, y_5)
  - ➜ VB naturais: x_1 e x_4 (Correspondentes a y_3, y_6)
  - ➜ VNB de folga: x_5 e x_6 (Correspondentes a y_1, y_2)
- Como x_2, x_3, x_5 e x_6 são variáveis não básicas, logo $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$ e a solução óptima do primal decorre da solução do sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_4 &= 1 \\
2x_1 + x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

- A solução do sistema é $x_1 = x_4 = 1/3$.
- A solução completa primal é:

$$
x^* = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Z^* = \frac{4}{3}
$$

Interpretação Económica do Dual

Considere o seguinte problema: Uma manufactura produz mesas e bancos, sendo capaz de vender toda a sua produção no período. O único recurso restrito é a mão de obra, cuja produtividade, juntamente com os lucros, são dados na tabela a seguir.

Produto	Lucro unitário	Homens Horas por unidade produzida: Departamento de montagem	Departamento de acabamento
Mesas	R$ 20	3	4
Bancos	R$ 24	6	2
Homens horas disponíveis		60	32

- O modelo de programação linear para este problema é:

$$\text{Maximizar } Z = 20x_1 + 24x_2$$

Sujeito a :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\leq 60 && (\text{Depto. de Montagem}) \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 32 && (\text{Depto. de Acabamento}) \\ x_1 &\geq 0 && (\text{n}^\text{o} \text{ de mesas a produzir}) \\ x_2 &\geq 0 && (\text{n}^\text{o} \text{ de bancos a produzir}) \end{aligned}$$

Interpretação Económica do Dual

- Este PPL (primal) tem $n = 2$ actividades e $m = 2$ recursos.
- O c_j no primal representa o lucro por unidade de actividade j.
- O recurso i, cuja disponibilidade máxima é b_i é consumido à taxa de a_{ij} unidades por unidade da actividade j.

A tabela de solução óptima para este PPL é:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	2/9	-1/6	8
x_1	1	0	-1/9	1/3	4
F.O	0	0	28/9	8/3	$-Z + 272$

- A solução óptima do PPL primal é $x^* = [4; 8; 0; 0]$
- O método simplex identifica simultaneamente uma solução ótima x^* para o PPL primal e uma solução ótima complementar y^* para o PPL dual (encontrada na linha FO).
- Assim, a solução óptima do PPL dual será $y^* = [28/9; 8/3; 0; 0]$

Interpretação Económica do Dual

- Qual é a interpretação económica dessas variáveis duais?

Interpretação Económica do Dual

- Qual é a interpretação económica dessas variáveis duais?
  - A solução óptima da primeira variável natural dual, $y_1^* = 28/9$, indica o impacto da variação de um homem/hora de montagem (primeira restrição do PPL) sobre o lucro da manufactura.
  - $y_2^* = 8/3$, indica o impacto da variação de um homem/hora de acabamento sobre o lucro da manufactura.
  - Entre os dois sectores, deveria se optar pela montagem, por ter impacto mais elevado sobre o lucro;
  - Os valores de y^* são chamado de preços-sombra;
- Em geral, a interpretação económica do Teorema de C.F. pode ser vista de diversas maneiras, dependendo dos valores das VF e VN dos PPLs Primal e Dual.
- Vejamos as interpretações dos quatro casos, aplicados a um problema primal na forma padrão.

Interpretação Económica do Dual

CASO A: $y_i^* = 0$ e $x_{n+i}^* > 0$

- Como a variável de folga do Primal x_{n+i}^* é maior que zero, na solução óptima do Primal temos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Conclusão: Podemos dizer que nem todo recurso i está sendo consumido pelas n actividades, havendo, portanto, sobra desse recurso. Logo, o preço-sombra (y_i) deve ser zero;

Interpretação Econômica do Dual

CASO A: $y_i^* = 0$ e $x_{n+i}^* > 0$

- Como a variável de folga do Primal x_{n+i}^* é maior que zero, na solução óptima do Primal temos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Conclusão: Podemos dizer que nem todo recurso i está sendo consumido pelas n actividades, havendo, portanto, sobra desse recurso. Logo, o preço-sombra (y_i) deve ser zero;

CASO B: $y_i^* > 0$ quando $x_{n+i}^* = 0$

- Como a variável x_{n+i}^* é igual a zero, na solução óptima do Primal temos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Conclusão: Podemos dizer que todo recurso i está sendo consumido pelas n actividades, não havendo, portanto, sobra desse recurso. Logo, o preço-sombra (y_i) deve ser maior que zero;

Interpretação Económica do Dual

CASO C: $x_j^* = 0$ e $y_{m+j}^* > 0$

- Como a variável natural do Primal x_j^* é igual a zero, na solução óptima do Dual temos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* - y_{m+j}^* = c_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* \geq c_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

  $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i$ representa o valor implícito (custo de oportunidade) de uma produção do produto j;

- Conclusão: significa que a actividade x_j não seria realizada, pois o custo seria maior que o valor do seu benefício. Ou seja, já que $x_j^* = 0$, este não será produzido ou consumido;

CASO D: $x_j^* > 0$ quando $y_{m+j}^* = 0$

- Como a variável de natural do Primal x_j^* é maior que zero, isso significa que não será produzido na solução óptima. Matematicamente, temos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* - y_{m+j}^* = c_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* = c_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

- Conclusão: podemos dizer que o valor implícito da produção de uma unidade do produto j $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i^* \right)$ deve ser igual a c_j (geralmente o valor ou lucro do produto j).