Teoria de Conjuntos

Timóteo Sambo

26 de março de 2023

Conjuntos, Relação de pertinência e Subconjunto

Conjunto

Um conjunto pode ser entendido como qualquer colecção de objectos, que são chamados de elementos do conjunto. Um conjunto que não possui elemento é chamado de conjunto vazio, e é representado por $\emptyset$.

A relação de pertinência indica se um objeto é, ou não, um elemento de um conjunto, por meio da notação $a \in A$, que significa que a é um elemento do conjunto A. Por outro lado, quando a não é um elemento do conjunto A, escrevemos $a \notin A$.

Conjunto finito

Um conjunto diz-se finito se ele contém um número finito de termos; caso contrário o conjunto diz-se infinito. Denotaremos por $|A|$ o número de elementos de A.

Representação de Conjuntos

Conjuntos podem ser representados por:

- Compreensão;
  Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$
- Enumeração;
  Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Definição recursiva;

Subconjuntos

Subconjuntos

O conjunto A é um subconjunto de B, e escreve-se $A \subseteq B$, se $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Teorema

- O conjunto $\emptyset$ é um subconjunto de qualquer conjunto.
- $A \subseteq A$

Exemplo: São verdadeiras as proposições:

- $\{a\} \in \{x, y, \{a\}\}$; $\{a\} \subseteq \{x, y, a\}$;;
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$; $\emptyset \in \{x, y, \emptyset\}$
- $\emptyset \subseteq \{x, y, \emptyset\}$

Prove: Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$

$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$. Portanto, $A \subset C$

Conjuntos habituais

Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto dos números naturais incluindo o zero: $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

Conjunto dos números racionais: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Conjunto dos números irracionais: $\mathbb{I}$

Conjunto dos números reais: $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Igualdade de Conjuntos

Igualdade de conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos, diz-se que A é igual à B e escreve-se $A = B$, se eles têm exactamente os mesmos elementos, i.e, $A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Exemplo

Sejam os seguintes conjuntos: $A = \{m \in \mathbb{Z} : m = 2i - 1, \text{ para algum inteiro } i\}$ $B = \{m \in \mathbb{Z} : m = 3j + 2, \text{ para algum inteiro } j\}$ Verifique se $A = B$.
Resolução: $2 \in B$ mas $2 \notin A$. Portanto,

$$A \neq B.$$

Conjunto Potência

Conjunto Potência

Dado um conjunto X, designa-se por conjunto potência de X e denota-se por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto dos subconjuntos de X, i.e,

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : \ Y \subseteq X\}.$$

Exemplo

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\};$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\})) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$

Observação

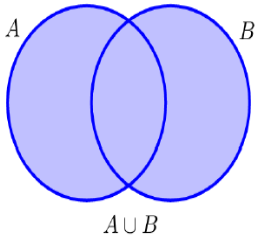
$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Operações com conjuntos

Sejam A e B dois subconjuntos de certo conjunto universal $\mathcal{U}$.

União de A e B

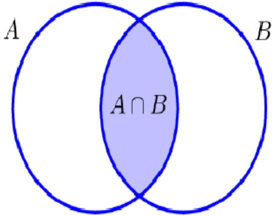
$$A \cup B = \{x : \ (x \in A) \ \text{ou} \ (x \in B)\}$$



Operações com conjuntos

Intersecção de A e B

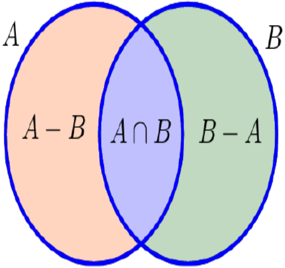
$$A \cap B = \{x : \ (x \in A) \ \text{ e } \ (x \in B)\}$$



Operações com conjuntos

Diferença de A e B

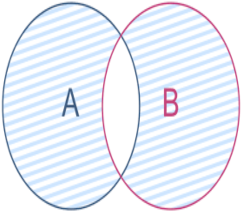
$$A - B = A \setminus B = \{x : \ (x \in A) \ \text{ e } \ (x \notin B)\}$$



Operações com conjuntos

Diferença Simétrica de A e B

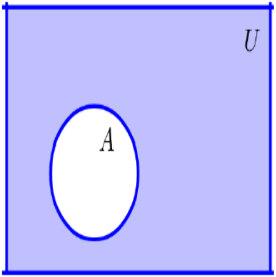
$$A \triangle B = \{x : \ (x \in A \ \text{ e } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ (x \notin A \ \text{ e } \ x \in B)\}$$



Operações com conjuntos

Complementar de A

$$\overline{A} = \{x : \; x \notin A\}$$



Exemplo

Sejam $A = \{a, b, c, e\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{a, c, e, f\}$. Então:

- $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
- $A \cap B = \{b, c\}$
- $A \setminus B = \{a, e\}$
- $B \setminus A = \{d\}$
- $C \setminus B = \{a, e, f\}$
- $A \triangle B = \{a, d, e\}$
- $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = \{a, b, c, e\}$
- $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = \{a, b, d, e\}$.

Sejam $A = \{0, 2, 8\}$, $B = \{2, 8, 9\}$, $C = \{0, 4, 8, 9\}$ e $\mathcal{U} = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$ Então:

- $\overline{A \cap B} = \{0, 4, 6, 9\}$
- $A \triangle C = \{2, 4, 9\}$
- $(\overline{A \cap B}) \setminus (A \triangle C) = \{0, 6\}$

Propriedades

- Comutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;
- Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- Distribuitiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- Distribuitiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- Absorção: $A \cup (A \cap B) = A$; $\quad A \cap (A \cup B) = A$;
- De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- Dominação: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$; $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$;
- Neutro: $A \cup \emptyset = A$; $\quad A \cap \mathcal{U} = A$;
- Complementares: $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$; $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset \quad \overline{\mathcal{U}} = \emptyset$; $\quad \overline{\emptyset} = \mathcal{U}$;
- Complementação: $\overline{(\overline{A})} = A$;
- Idempotência: $A \cap A = A$; $\quad A \cup A = A$;
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

Demonstração das propriedades por definição

Lei de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Prova: Devemos provar que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Neste caso, provamos ambas, uma vez que usamos apenas a equivalência.

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} \quad &\iff \quad \neg(x \in (A \cup B)) \\
&\iff \quad \neg(x \in A \vee x \in B) \\
&\iff \quad x \notin A \wedge x \notin B \\
&\iff \quad x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\
&\iff \quad x \in \overline{A} \cap \overline{B}.
\end{aligned}$$

Demonstração das propriedades por definição

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Prova : Devemos provar que $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ e $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$. Neste caso, provamos ambas, uma vez que usamos apenas a equivalência.

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
&\iff x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\iff x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \\
&\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).
\end{aligned}$$

Demonstração das propriedades usando leis

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{(B \cap C)} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C &= (A \cap \overline{B}) \setminus C \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

Produto Cartesiano

Produto Cartesiano A e B

$$A \times B = \{(a, b) : \ (a \in A) \ \text{ e } \ (b \in B)\}$$

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2\}, \ B = \{x, y, z\}$

- $A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$;
- $B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1), (z, 2)\}$;
- $A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Observação:

Os dois primeiros exemplos, mostram que o produto cartesiano não é comutativo, i.e, $A \times B \neq B \times A$.

Propriedades do Produto Cartesiano

Propriedades

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
- $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$;
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Prove que $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \quad &\iff (x \in A) \wedge (y \in B \setminus C) \\
&\iff (x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \notin C) \\
&\iff (x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \notin C) \\
&\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C) \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C) \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C).
\end{aligned}$$